ΜΕΜ-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Ασκήσεις στα πεπερασμένα στοιχεία

Άσκηση 1 *Διατυπώστε την ασθενή μορφή του προβλήματος δυο σημείων,*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, διατυπώστε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το παραπάνω πρόβλημα.

Άσκηση 2 *Διατυπώστε την ασθενή μορφή του προβλήματος δυο σημείων,*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, διατυπώστε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το παραπάνω πρόβλημα.

Άσκηση 3 *Προσδιορίστε τους πίνακες στην Άσκηση 1 και Άσκηση 2.*

Άσκηση 4 *Εξηγήστε τι είναι λανθασμένο τόσο στην ασθενή όσο και στην κλασσική διατύπωση του παρακάτω προβλήματος,*

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, εξηγήστε γιατί και οι δυο διατυπώσεις για το παραπάνω πρόβλημα δεν είναι καλά ορισμένες.

Άσκηση 5 *Έστω $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ μια διαμέριση του $J = [0,1]$ και $h = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο S, έτσι ώστε*

$$S = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1 \quad \text{και} \quad v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Έστω $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ με $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, βάση του S. Επίσης, ορίζουμε την παρεμβάλουσα μιας συνάρτησης $v \in \mathcal{C}([0,1])$ με $v_I : \mathcal{C}([0,1]) \to S$ με τύπο

$$v_I := \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\phi_i.$$

Έστω $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}$, δείξτε ότι

1. $\|(u - u_I)'\|_{L_2(J)} \le Ch\|u''\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, u \in V,$
2. $\|u - u_I\|_{L_2(J)} \le Ch^2\|u''\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, u \in V,$

με σταθερά C ανεξάρτητη των h και u.

Άσκηση 6 *Έστω το διάστημα $J = [0,1]$ και $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, \|v'\|_{L_2(J)} < \infty \;\text{ και }\; v(0) = 0\}$. Θεωρούμε την διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\alpha(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

Δείξτε ότι

$$\|v\|_{L_2(J)}^2 + \|v'\|_{L_2(J)}^2 \le C\alpha(v,v), \quad \forall\, v \in V. \tag{0.1}$$

Βρείτε ακριβώς την σταθερά C.

Άσκηση 7 *Έστω $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ μια διαμέριση του $J = [0,1]$ και $h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,\ldots,n$. Θεωρήστε τον μέθοδο πεπερασμένων διαφορών που παριστάνεται από*

$$-\frac{2}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i}\right) = f(x_i). \tag{0.2}$$

Δείξτε ότι η $\tilde{u}_S = \sum_i U_i\phi_i$ ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα

$$\alpha(\tilde{u}_S, v) = Q(fv),\ \ \forall\, v \in S,$$

με

$$\alpha(v,w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx,$$

και ο S αποτελείται από γραμμικές συναρτήσεις,

$$S = \big\{v \in \mathcal{C}([0,1])\ :\ v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1 \quad \textit{και} \quad v(0) = 0\big\}$$

Επιπλέον, ο Q δηλώνει τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης που βασίζεται στον κανόνα του τραπεζίου,

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} w(x_i).$$

Υποθέστε $h_0 = h_{n+1} = 0$.

Άσκηση 8 *Έστω Q ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης της προηγούμενης άσκησης. Δείξτε την παρακάτω εκτίμηση σφάλματος.*

$$\left|Q(w) - \int_0^1 w(x)\,dx\right| \le Ch^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w''(x)|\,dx.$$

Άσκηση 9 *Θεωρήστε το πρόβλημα,*

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Έστω το συναρτησιακό

$$F(v) := \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,\ \ \forall\, v \in V,$$

με $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1])\ :\ v(0) = v(1) = 0\}$. Δείξτε ότι η λύση $u \in V$ του ασθενούς προβλήματος ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησιακό στον V.

Άσκηση 10 *Η συνάρτηση u ορίζεται στο διάστημα $J = [a,b]$ και είναι τέτοια ώστε $u(0) = 0$. Δείξτε την παρακάτω ανισότητα*

$$\|u\|_{L_2(J)} \le (b-a)\|u'\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^1(J)$$

Η παραπάνω ανισότητα ονομάζεται ανισότητα του Poincaré.

Άσκηση 11 *Έστω $J = [0,1]$ και u_S η λύση του ασθενούς προβλήματος $\alpha(u_S, v) = (f,v),\ \forall\, v \in S$, όπου S και $\tilde{u}_S$ όπως στην Άσκηση 7. Δείτε ότι*

$$|\alpha(u_S - \tilde{u}_S, v)| \le Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|v\|_{L_2(J)} + \|v'\|_{L_2(J)}\right). \tag{0.3}$$

Άσκηση 12 *Θεωρήστε τις συναρτήσεις όπως στην Άσκηση 11. Δείξτε ότι*

$$\|u_S' - \tilde{u}_S'\|_E \le Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_E$ ονομάζεται νόρμα ενέργειας και ορίζεται ως

$$\|v\|_E = \sqrt{\alpha(v,v)},\ \ \forall\, v \in V.$$

Άσκηση 13 *Έστω* $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = 0\}$ *και* $\alpha(\cdot,\cdot) \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ *η διγραμμική μορφή η οποία ορίζεται ως*

$$\alpha(v,w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx.$$

Δείξτε ότι

$$\|v\|_{max}^2 \leq \alpha(v,v), \quad \forall\, v \in V \cap \mathcal{C}^1(0,1).$$

Εδώ $\|v\|_{max} = \max_{0\leq x\leq 1} |v(x)|$.

Άσκηση 14 *Έστω το πρόβλημα*

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u = f, \quad x \in J = [0,1] \\ \qquad\qquad u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

με σταθερά $\epsilon > 0$. *Δείξτε ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος ικανοποιεί την εκ των προτέρων εκτίμηση*

$$\|\epsilon u''\|_{L_2(J)} \leq \|f\|_{L_2(J)}.$$

Άσκηση 15 *Θεωρήστε το πρόβλημα δυο σημείων της μορφής,*

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in J = [0,1] \\ \qquad\qquad u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

με $q,\ f \in \mathcal{C}[0,1]$ *και* $q(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [0,1]$. *Δείξτε ότι αν* $u \in \mathcal{C}_0^2[0,1]$, *τότε υπάρχει μια σταθερά* C *η οποία εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος, έτσι ώστε*

$$\|u\|_{L_2(J)} + \|u'\|_{L_2(J)} + \|u''\|_{L_2(J)} \leq C\|f\|_{L_2(J)}.$$